数理解析研究所講究録
389巻 1980年 122-142

Eta Invariants and Chern-Simons Invariants

京大 理学部　坪井堅二

§0. Introduction

定義

1) M : C^∞-manifold , g, g' : M上の Riemannian metrics
$g \sim g'$: conformally related
$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists f : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$: C^∞ s.t. $g' = f \cdot g$

2) (M, g), (M', g') : Riemannian manifolds
$(M, g) \triangleq (M', g')$: conformally isomorphic
$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \varphi : M \triangleq M'$: C^∞-diffeomorphism s.t. $g \sim \varphi^* g'$

3) (M, g) : Riemannian manifold
g_0 : standard metric on $\mathbb{R}^N$
$\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$: conformal immersion
$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ φ : C^∞-immersion かつ $g \sim \varphi^* g_0$

"conformal" は "isometric" よりも当然弱い条件である。すなわち. isometric $\Rightarrow$ conformally isomorphic, conformalにimmerseできない ⇒ isometricにimmerseできない etc..

Example

$S^n - \{\text{one point}\} \cong \mathbb{R}^n$

これは，よく知られているようにstereographic projectionによる。

$M = (M, g)$: Riemannian manifoldがあるcodimensionのEuclid空間にいつisometric（又はconformal）にimmerseできるかという問題を考える。一般に"十分大きい"codimensionでならisometricにimmerseできる（従ってconformalにもimmerseできる）ということはわかっているが，"あまり大きくない"codimensionでは，isometricにimmerseできるかどうかは，入るとも入らないともわからない場合が多い。Chern，Simonsは[3]，[9]においてChern-Simons invariant又はS-characterと呼ばれるconformal invariantを定義して，それを用いてMがあるcodimensionのEuclid空間にconformalにimmerseできるための必要条件（従ってisometricにimmerseできるための必要条件でもある）を与えた。Chern-Simons invariantは正定曲率のstandard metricを与えたLens spaceに対して，

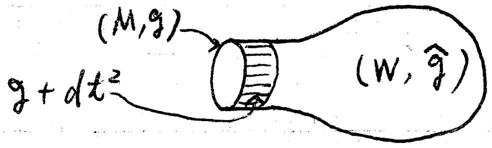
計算されている（Millson [7]）他、bi-invariant metric を与えた globally symmetric space に対する Donnelly [4] の結果があるが、一般には具体的に計算することは困難な場合が多い。一方 Atiyah, Patodi, Singer は [1] において、closed oriented 4k-1-dimensional Riemannian manifold M に対して、その Eta invariant と呼ばれる実数を定義した。Eta invariant は manifold の種類、metric の種類という両面において、Chern-Simons invariant よりも広い計算の可能性をもっている。そこで、Chern-Simons invariant と Eta invariant とを結びつけることにより、closed oriented 4k-1-dimensional Riemannian manifold M がある codimension の Euclid 空間に conformal に immerse できるための必要条件を Eta invariant によって表現し、それを用いて新しい"nonvanishing Chern-Simons invariant"の例をつくることがここにおける話題である。

§1. Chern-Simons invariant

以下 $M=(M,g)$: closed oriented 4k-1-dimensional Riemannian manifold とする。$\dim M \not\equiv 0 \pmod 4$ であるから、よく知られているように、M 又は $2M = M \cup M$ は oriented cobordism の意味において、zero-cobordant

である。そこで以下簡単のため、M：zero-cobordantとする。M：not zero-cobordant の場合は Mの代わりに 2Mをとることにより、以下の議論は全く同様に成り立つ。

W：compact oriented $4k$-dimensional manifold with boundary M とする。Wには $\partial W = M$ の適当な collar neighborhood $M \times [0,1]$ で Mの metric g と $[0,1]$の standard metric dt^2 の product $g + dt^2$ になっているような metric $\hat{g}$ を任意にひとつとって与える。(partition of unity により、上のような $\hat{g}$ をつくることは可能である。)



P_i：i-th Pontrjagin polynomial

$Q = Q(a_1, \cdots, a_k)$：$\mathbb{Z}$-coefficient polynomial of weight k (i.e. $Q(a_1{}^4, a_2{}^8, \cdots, a_k{}^{4k})$：homogeneous of degree $4k$) とする。このとき、

$Q(P(\hat{g})) = Q(P_1(\hat{g}), \cdots, P_k(\hat{g}))$：$4k$-form on W

<u>定義</u>

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \ni SQ(P_1, \cdots, P_k)(M, g) \underset{\text{def.}}{=} \overline{\int_W Q(P(\hat{g}))}$$

(ここで $\overline{}$ は mod $\mathbb{Z}$ reduction)

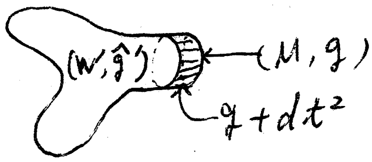
これを、$Q(P_1, \cdots, P_k)$に対する (M, g) の Chern-Simons invariant と呼ぶ。

claim 1

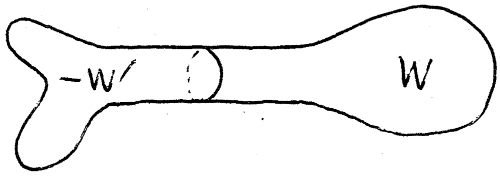
$SQ(P_1, \cdots, P_k)(M, g)$ は W, WにおけるMの collar neighborhood のとり方, collar neighborhood における product metric のWへの拡張 $\hat{g}$ のとり方に depend せず, (M, g)によって決まる。

(proof)

$(W', \hat{g}')$: another pair とする。



$N \equiv W \underset{M}{\cup} (-W')$: closed oriented $4k$-dimensional manifold とするとき, $\hat{g}$, $\hat{g}'$に対する境界条件より, $\hat{g}$, $\hat{g}'$をつなぐことによってN上の smooth な Riemannian metric $\hat{g} \cup \hat{g}'$ が定義される。

$(N, \hat{g} \cup \hat{g}')$: 

このとき,

$$\int_W Q(P(\hat{g})) - \int_{W'} Q(P(\hat{g}'))$$

$$= \int_N Q(P(\hat{g} \cup \hat{g}')) : N\text{の Pontrjagin } Q\text{-number}$$

$$\in \mathbb{Z}$$

従って, $\overline{\int_W Q(P(\hat{g}))} = \overline{\int_{W'} Q(P(\hat{g}'))}$

Q.E.D.

<u>claim 2</u>

$\mathcal{S}Q(P_1,\cdots,P_k)(M,g)$ は (M,g) の conformal structure のみに depend する。すなわち g, g' を M上の conformally related な metrics とするとき $\mathcal{S}Q(P_1,\cdots,P_k)(M,g)$ $= \mathcal{S}Q(P_1,\cdots,P_k)(M,g')$ である。

(proof)

$f : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$: C^∞ s.t. $g' = f\cdot g$ とする。

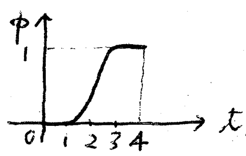
<u>1st. step</u>

$M\times[0,4]$ の metric $\tilde{g}$ を次のように定める。

$M\times[0,4] \ni \forall (x,t)$ に対して

$$\tilde{g}(x,t) \underset{\text{def.}}{=} \{\phi(t)+(1-\phi(t))f(x)\}(g(x)+dt^2)$$

(ただし $\phi : [0,4] \longrightarrow [0,1]$: C^∞
$\phi|_{[0,1]} \equiv 0$, $\phi|_{[3,4]} \equiv 1$)



このとき $\tilde{g} \sim g + dt^2$: conformally related である。

Pontrjagin forms は conformal invariant である (c.f. [3]) から、

$$\int_{M\times[0,4]} Q(P_1(\tilde{g}),\cdots,P_k(\tilde{g}))$$
$$= \int_{M\times[0,4]} Q(P_1(g+dt^2),\cdots,P_k(g+dt^2))$$

(ここで $q : M\times[0,4] \longrightarrow M$: projection として
$P_i(g+dt^2) = q^*P_i(g)$ であるから
$Q(P(g+dt^2)) = q^*Q(P(g)) = 0$ ($\because \deg Q(P(g)) > \dim M$))

$=0$

2nd. Step

$M\times[0,4]$ の metric $\tilde{g}$ を次のように定義する。

$M\times[0,4]\ni{}^{\forall}(x,t)$ に対して.

$\tilde{g}(x,t)\underset{\text{def.}}{=} f(x)g(x)+\{(1-\varphi(t))+\varphi(t)f(x)\}dt^2$

このとき. ${}^{\forall}i$ に対して. $P_i(\tilde{g})$ は dt を含まない。

従って. $\int_{M\times[0,4]}Q(P(\tilde{g}))=0$

∵ $4k=n$, $(1-\varphi(t))+\varphi(t)f(x)=\psi(x,t)\ (>0)$ と書く。

$M\supset U$, $X_1,\cdots,X_{n-1}$: U 上の $g'=f\cdot g$ に関する orthonormal vector fields, $X_n=\frac{1}{\sqrt{\psi(x,t)}}\frac{\partial}{\partial t}$ とする。このとき.

$\{X_1,\cdots,X_{n-1},X_n\}$ は $\tilde{g}$ に関する $U\times[0,4]$ 上の orthonormal vector fields である。この local basis に関して.

$\tau: U\times[0,4]\longrightarrow O(M\times[0,4])$ を $M\times[0,4]$ の orthonormal frame bundle $O(M\times[0,4])$ への local section とするとき. $\{X_1^*,\cdots,X_n^*\}$: dual 1-forms of $\{X_1,\cdots,X_n\}$ として $\tau^*\Omega_{ij}=\sum_{k<l}R_{ijkl}X_k^*\wedge X_l^*$ であった。

(ここで、$\Omega=(\Omega_{ij})$: $\tilde{g}$ に対する curvature form
R_{ijkl}: curvature tensor の成分)

Lemma

$1\leqq i,j,k\leqq n-1$ のとき. $R_{ijkn}=0$

(proof of Lemma)

(※) $1 \leqq i \leqq n-1 \Rightarrow \nabla_{X_i} X_n = 0$

∵ $X_i = \sum_{m=1}^{n-1} \xi_i^m(x) \frac{\partial}{\partial x^m}$ ($x_1, \cdots, x_{n-1}$ は U 上の local coordinate)

とする。$\langle\ ,\ \rangle$ を $\tilde{g}$ による内積として、

$\langle \nabla_{X_i} X_n, X_k \rangle = \frac{1}{2}\{ X_i \langle X_n, X_k \rangle + X_n \langle X_i, X_k \rangle - X_k \langle X_i, X_n \rangle$
$+ \langle [X_i, X_n], X_k \rangle + \langle [X_k, X_i], X_n \rangle + \langle [X_k, X_n], X_i \rangle \}$

<u>case1</u> $1 \leqq k \leqq n-1$ の場合

$\langle \nabla_{X_i} X_n, X_k \rangle = \frac{1}{2}\{ \langle [X_i, X_n], X_k \rangle + \langle [X_k, X_n], X_i \rangle \}$

(ここで $[X_i, X_n] = \{ \sum_{m=1}^{n-1} \xi_i^m(x) \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{1}{\sqrt{f(x,t)}} \right) \} \frac{\partial}{\partial t}$ であるから)

$= 0$

<u>case2</u>

$\langle \nabla_{X_i} X_n, X_n \rangle = - \langle X_n, \nabla_{X_i} X_n \rangle$ (従って) $= 0$

以上で(※)が示された。

$R_{ijkn} = - R_{ijnk} = - \langle \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_n - \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_n - \nabla_{[X_i, X_j]} X_n$
$, X_k \rangle = 0$　　　　Lemma Q.E.D.

Lemmaにより、次の2つがわかる。($\tau^* \Omega$ を再び Ω と書くこととする)

(i) $1 \leqq i, j \leqq n-1 \Rightarrow \Omega_{ij}$ は dt を含まない。

(ii) $\Omega_{in} = \sum_{k=1}^{n-1} R_{inkn} X_k^* \wedge X_n^* = \left(\sum_{k=1}^{n-1} R_{inkn} X_k^* \right) \wedge X_n^*$

　従って $\Omega_{in} \wedge \Omega_{jn} = 0$ for $1 \leqq {}^\forall i, {}^\forall j \leqq n$

さて $(2\pi)^i P_i(\tilde{g}) = \sum_{1 \leqq j_1 < \cdots < j_{2i} \leqq n} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}(2i)} \mathrm{sgn}(\tau) \Omega_{j_1 j_{\tau(1)}} \wedge \cdots$
$\wedge \Omega_{j_{2i} j_{\tau(2i)}} =$ (dt を含まない項) $+ \sum_{1 \leqq j_1 < \cdots < j_{2i-1} \leqq n-1} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}(2i)} \mathrm{sgn}(\tau)$

$\Omega_{j_1 j_{\tau(1)}}\wedge\cdots\wedge\Omega_{j_{2i-1} j_{\tau(2i-1)}}\wedge\Omega_{n\, j_{\tau(2i)}}$
$=$ (dt を含まない項) $+ \sum_{j}\sum_{\tau}\mathrm{sgn}(\tau)\,\Omega_{j_1 j_{\tau(1)}}\wedge\cdots\wedge\Omega_{j_{\tau^{-1}(2i)}\, n}\wedge\cdots\wedge\Omega_{n\, j_{\tau(2i)}}$ $=$ (dt を含まない項) $+\ 0$

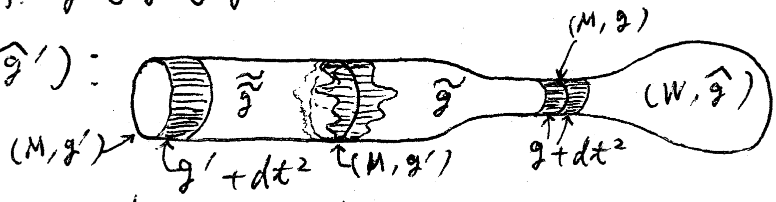
<u>3rd. Step</u>

$W' \underset{\text{def.}}{=} (M\times[0,4])\cup(M\times[0,4])\cup W$

こちらの $M\times\{4\}$ とこちらの $M\times\{0\}$ をつなぐとする。

$\hat{g}' \underset{\text{def.}}{=} \tilde{\tilde{g}}\cup\tilde{g}\cup\hat{g}$

$(W', \hat{g}')$:



このとき claim 1 により，

$SQ(P_1,\dots,P_k)(M,g') = \overline{\int_{W'} Q(P(\tilde{\tilde{g}}\cup\tilde{g}\cup\hat{g}))}$

$= \overline{\int_{M\times[0,4]} Q(P(\tilde{\tilde{g}})) + \int_{M\times[0,4]} Q(P(\tilde{g})) + \int_{W} Q(P(\hat{g}))}$

(1st. step , 2nd. step より)

$= \overline{\int_{W} Q(P(\hat{g}))} = SQ(P_1,\dots,P_k)(M,g)$

Q.E.D.

$P_i^{\perp}$: i-th inverse Pontrjagin polynomial

(i.e. $(1+P_1+\cdots+P_i+\cdots)(1+P_1^{\perp}+\cdots+P_i^{\perp}+\cdots)=1$)

$1\leq {}^{\forall}s \leq k$ に対して，上記と同様に，M の conformal invariant $SQ(P_s^{\perp},\dots,P_k^{\perp})(M,g)$ が定義される。

次の Theorem は Simons [9] の Theorem 5.4 と Theorem 5.15 から ただちに出る。

Key Theorem

M が codimension d で $\mathbb{R}^{4k-1+d}$ に conformal に immerse できる。$\Rightarrow S\,Q(P_s^{\perp},\cdots,P_k^{\perp})(M,g)=0$

for ${}^{\forall}s \geq [\frac{d}{2}]+1$ & ${}^{\forall}Q$: $\mathbb{Z}$-coeff. poly. of weight k

Key Theorem の一番強い形として $s=k$ において次の corollary が出る。

Corollary

M が codimension $2k-1$ で $\mathbb{R}^{6k-2}$ に conformal に immerse できる。$\Rightarrow S P_k^{\perp}(M,g)=0$

§2. Eta invariant

定義

L_k : Hirzebruch L-polynomial の weight k term

$\mathrm{Sign}(W)$: cup product によって定義される symmetric bilinear form $H^{2k}(W,\partial W;\mathbb{R})\otimes H^{2k}(W,\partial W;\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}$ の signature として

$$\mathbb{R}\ni\eta(M)\,(=\eta(M,g))\underset{\mathrm{def.}}{=}\int_W L_k(P_1(\hat{g}),\cdots,P_k(\hat{g}))-\mathrm{Sign}(W)$$

これを、(M,g) の Eta invariant と呼ぶ。

claim

$\eta(M)$ は (M,g) の conformal structure のみで決まる。

(proof)

記号は §1. claim 1 の(proof)と同じとする。

$(W', \hat{g}')$: another pair とするとき、

$N = (W \underset{M}{\cup} (-W'), \hat{g} \cup \hat{g}')$: closed oriented 4k-dimensional

であるから、Hirzebruch Signature Theorem により、

$\int_N L_k(P(\hat{g} \cup \hat{g}')) = \mathrm{sign}(N)$

一方 $\int_N L_k(P(\hat{g} \cup \hat{g}')) = \int_W L_k(P(\hat{g})) - \int_{W'} L_k(P(\hat{g}'))$

$\mathrm{sign}(N) = \mathrm{sign}(W) - \mathrm{sign}(W')$ であるから、

$\int_W L_k(P(\hat{g})) - \mathrm{sign}(W) = \int_{W'} L_k(P(\hat{g}')) - \mathrm{sign}(W')$

conformal structure のみで決まることは §1. claim 2 と同様にして示せる。 Q. E. D.

この定義のままでは、Eta invariant は $\mathrm{sign}(W)$ という項がついた分だけ、かえって Chern - Simons invariant よりも計算が困難になってしまう。しかし、ここで、Atiyah, Patodi, Singer [1] による次の結果がある。

<u>Theorem</u>

$\Gamma = C^\infty(M, \oplus \Lambda^{2p} T^*M)$: even forms on M

$D : \Gamma \longrightarrow \Gamma$: first order self-adjoint elliptic differential operator defined by

$D\phi = (-1)^{k+p+1}(*d - d*)\phi$ for $2p$-form ϕ

(ここに、$*$: Hodge's star operator)

λ : eigenvalue of D with finite multiplicity $m(\lambda)$ とする。$\forall s \in \mathbb{C}$ に対して $\eta(s) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\lambda \neq 0} \mathrm{sign}(\lambda) \cdot m(\lambda) |\lambda|^{-s}$ ($\mathrm{sign}(\lambda) = 1$ if $\lambda > 0$, -1 if $\lambda < 0$) とおくと、$\mathrm{Re}(s)$ が十分大なるとき $\eta(s)$ は絶対収束して holomorphic function を表わす。さらに $\eta(s)$ は meromorphic function として全平面に解析接続され 0 を pole にもたない。このとき $\eta(M, g) = \eta(0)$ が成り立つ。

上の Theorem により $\eta(M)$ には Chern-Simons invariant よりも広い計算の可能性が開ける。例えば、M が orientation-reversing isometry をもつ Riemannian manifold を有限群の free action で割った形をしている場合には、$\eta(M)$ は Atiyah, Singer の G-signature formula により計算されることが [5] で示された。

Example

$p \geq 1$, $q_1, \cdots, q_{2k}$: relatively prime to p として、
$M = L(p; q_1, \cdots, q_{2k}) = S^{4k-1}/\sim$: Lens space
$\left(\mathbb{C}^{2k} \supset S^{4k-1} \ni (z_1, \cdots, z_{2k}) \sim (e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}q_1}{p}} z_1, \cdots, e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}q_{2k}}{p}} z_{2k}) \right)$
とする。M の metric g は次の条件をみたす限り任意でよいとする。（正定曲率の standard metric すなわち S^{4k-1} の standard metric から induce された metric

は条件を明らかにみたしている。)

(※) $\gamma : S^{4k-1} \longrightarrow M$: covering projection として、
$(S^{4k-1}, \gamma^{*} g)$ は orientation-reversing isometry をもつ。
このとき、

(※※) $\eta(M) = \dfrac{(-1)^k}{p} \sum_{s=1}^{p-1} \prod_{j=1}^{2k} \cot \dfrac{s q_j \pi}{p}$

となる。(c.f. [10] §1)

§3. Eta invariants and Chern-Simons invariants

定義

$$N_k \underset{\text{def}}{=} \min\{ n \in \mathbb{N} \mid n \cdot L_k : \mathbb{Z}\text{-coeff. poly.} \}$$
$$= \prod_{q : \text{prime},\ 3 \leq q \leq 2k+1} q^{[\frac{2k}{q-1}]}$$
$(N_1 = 3,\ N_2 = 45$ etc $)$

$$(1 + P_1 + \cdots + P_i + \cdots)(1 + P_1^{\perp} + \cdots + P_i^{\perp} + \cdots) = 1$$
$$\Rightarrow P_i = -P_i^{\perp} - P_{i-1}^{\perp} P_1 - \cdots - P_1^{\perp} P_{i-1}$$

であるから、induction により、$\exists Q_k$: $\mathbb{Z}$-coeff. poly. of weight k s.t. $N_k \cdot L_k(P_1, \cdots, P_k) = Q_k(P_1^{\perp}, \cdots, P_k^{\perp})$

このとき、

$$S Q_k(P_1^{\perp}, \cdots, P_k^{\perp})(M, g) = \overline{\int_W Q_k(P_1^{\perp}(\hat{g}), \cdots, P_k^{\perp}(\hat{g}))}$$
$$= \overline{N_k \int_W L_k(P_1(\hat{g}), \cdots, P_k(\hat{g}))}$$
$$= \overline{N_k \left\{ \int_W L_k(P(\hat{g})) - \operatorname{sign}(W) \right\}} = \overline{N_k \cdot \eta(M)}$$

従って key Theorem により．次の結果が出る。

<u>Proposition</u>

M が codimension 1 で $\mathbb{R}^{4k}$ に conformal に immerse できる。$\Rightarrow \overline{N_k \cdot \eta(M)} = 0$ i.e. $N_k \cdot \eta(M) \in \mathbb{Z}$

しかし、codimension 1 ではあまりおもしろくないので、もっと codimension を上げることを考える。

$Q_k(P_1^\perp, \cdots, P_k^\perp) = n_k P_k^\perp +$ (decomposable part of $P_1^\perp, \cdots, P_{k-1}^\perp$) $\quad (\exists n_k \in \mathbb{Z})$

$\left(\begin{array}{l} P_i^\perp = -P_i - P_{i-1}P_1^\perp - \cdots - P_1 P_{i-1}^\perp \text{ であるから} \\ \text{induction により} \end{array}\right)$

$= n_k P_k^\perp + \underbrace{(\text{decomposable part of } P_1, \cdots, P_{k-1})}_{\circledast}$

すなわち $\overline{N_k \cdot \eta(M)} = S Q_k(P_1^\perp, \cdots, P_k^\perp)(M, g)$

$= n_k \cdot S P_k^\perp(M, g) + S(\circledast)(M, g)$

<u>定義</u>

(M, g) : partially Pontrjagin flat

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $R(P_1(\Omega), \cdots, P_\ell(\Omega)) = 0$ as differential 4ℓ-form on M for $\forall R$: monomial of weight $\ell \geq [\frac{k+1}{2}]$ (ここで，$P_i(\Omega)$: M の metric g に対する M 上の i-th Pontrjagin form)

<u>Lemma</u> (c.f. [10] §3)

(M, g): partially Pontrjagin flat とする。

(i) $\pi : O(M) \longrightarrow M$: orthonormal frame bundle とする。

$\pi^* : H^{4k-1}(M; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{4k-1}(O(M); \mathbb{R}/\mathbb{Z})$: injective

$\Rightarrow S(\circledast)(M, g) = 0$

(ii) $H^{4i}(M; \mathbb{Z}) \ni p_i(TM)$: i-th Pontrjagin class of TM とする。$\exists c \in \mathbb{N}$ s.t. $c\, p_i(TM) = 0$ for $1 \leq {}^\forall i \leq [\frac{k}{2}]$

$\Rightarrow c \cdot S(\circledast)(M, g) = 0$

<u>Remarks</u>

1) (M, g) : conformally flat i.e. flat な Euclid 空間と local に conformally isomorphic

$\Rightarrow P_i(\Omega) = 0$ for ${}^\forall i \geq 1 \Rightarrow (M, g)$: partially Pontrjagin flat

2) M : parallelizable $\Rightarrow \pi^* : H^q(M; A) \rightarrow H^q(O(M); A)$: injective for ${}^\forall q$, ${}^\forall A$: abelian group

3) M : stably parallelizable $\Rightarrow p_i(TM) = 0$ for ${}^\forall i \geq 1$

Key Theorem の Corollary 及び 上の Lemma による 以下の結果が出る。

<u>Theorem 1</u>

(M, g) : partially Pontrjagin flat かつ

$\pi^*: H^{4k-1}(M;\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to H^{4k-1}(O(M);\mathbb{R}/\mathbb{Z})$: injective

と仮定する。 このとき.

M が codimension $2k-1$ で $\mathbb{R}^{6k-2}$ に conformal に immerse できる。

$$\Rightarrow \begin{cases} N_k \cdot \eta(M) \in \mathbb{Z} & \text{if } M : \text{zero-cobordant} \\ 2N_k \cdot \eta(M) \in \mathbb{Z} & \text{if } M : \text{not zero-cobordant} \end{cases}$$

特に $k=1$ すなわち $\dim M = 3$ の場合を考える。

よく知られているように、M^3: zero-cobordant, parallelizable で Theorem 1 の仮定をみたす。$N_1 = 3$ より.

Corollary

3-dimensional closed oriented Riemannian manifold M が $\mathbb{R}^4$ に conformal に immerse できる。

$\Rightarrow 3 \cdot \eta(M) \in \mathbb{Z}$

一方, Hirsh-Smale theory により. M は smooth には必ず $\mathbb{R}^4$ に immerse できる。

Theorem 2

M: partially Pontrjagin flat かつ $\exists c \in \mathbb{N}$ s.t. $c \cdot p_i(TM) = 0$ for $1 \leq {}^{\forall} i \leq [\frac{k}{2}]$ と仮定する。

このとき.

Mが $\mathbb{R}^{6k-2}$ に conformal に immerse できる。

$$\Rightarrow \begin{cases} c\,N_k\, q(M) \in \mathbb{Z} & \text{if } M: \text{zero-cobordant} \\ 2c\,N_k\, q(M) \in \mathbb{Z} & \text{if } M: \text{not zero-cobordant} \end{cases}$$

(注 c:even のときには. M:not zero-cobordant でも $c\,N_k\, q(M) \in \mathbb{Z}$ であることがいえる。)

§4. Examples

Example 1

3次元正定曲率空間は完全に分類されており、S^3を巡回群,広い意味での複多面体群 又は それらの直積 で割ったものしかない。 S^3を巡回群で割ったもの すなわち. Lens space については Millson が [7] において、その Chern-Simons invariant を調べているので、ここでは、複多面体群で割ったものについて調べてみる。metric も 正定曲率の standard metric を含む、もう少し一般な metric を 考えることにする。

S^3 = Lie group of length one quaternions

$$\alpha : S^3 \cong SU(2)$$
$$z_1 + z_2 j \longmapsto \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \qquad (z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1)$$

$S^3 \supset G$: finite subgroup として. G は S^3 上 right

multiplicationによって作用するものとする。
商空間 S^3/G には次の条件をみたす metric g を任意にひとつ与える。S^3 の standard metric から induce される正定曲率の metric なら明らかにこの条件をみたす。

$\gamma : S^3 \longrightarrow S^3/G$: covering projection とする。

$(S^3, \gamma^* g)$ は orientation-reversing isometry をもつ

$G \ni {}^{\forall} h$ に対して $e^{\theta(h)}, e^{-\theta(h)}$: eigenvalues of $\alpha(h)$ とするとき、$(S^3/G, g)$ の Eta invariant は次の式で計算される。

⊛ $\eta(S^3/G) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \neq 1} \cot^2\left(\frac{\theta(h)}{2}\right)$ （$|G|$: order of G）

G として次の3つを考える。(cf. 中岡[8])

$O^* = \{$ generated by $P = i,\ Q = j,\ B = -\frac{1+i+j+k}{2},\ R = \frac{i-k}{\sqrt{2}} \}$

$\cong$ 複8面体群 $(|O^*| = 48)$

$T^* = \{$ subgroup of O^* generated by $P, Q, B \}$

$\cong$ 複4面体群 $(|T^*| = 24)$

$I^* = \{$ generated by $U = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{1}{2} i + \frac{\sqrt{5}+1}{4} j,\ V = -i \}$

$\cong$ 複20面体群 $(|I^*| = 120)$

このとき、⊛ により $\eta(S^3/T^*)$, $\eta(S^3/O^*)$, $\eta(S^3/I^*)$ を計算機で求めることができる。

$\eta(S^3/T^*) = 1.36111\cdots$, $\eta(S^3/O^*) = 1.68055\cdots$
, $\eta(S^3/I^*) = 2.00555\cdots$

従って Theorem 1 の Corollary により S^3/T^*, S^3/O^*, S^3/I^* は いずれも $\mathbb{R}^4$ に conformal に immerse できない。

Example 2

$L^{15} = L(137; 1, 10, 100, 41, 136, 127, 37, 96)$

: 15-dimensional Lens space とおく。

これは Millson が [7] において、正定曲率 の standard metric を与えた Lens space の Chern-Simons invariant を調べたときに 用いた Example である。ここでは、L^{15} の metric g は次の条件をみたす限り任意でよいとする。(standard metric は明らかにこの条件をみたす)

(i) $r: S^{15} \longrightarrow L^{15}$: covering projection として、

(S^{15}, r^*g) : orientation-reversing isometry をもつ

(ii) g : partially Pontrjagin flat

このとき、$\eta(L^{15})$ は §2 の一番最後の formula で計算できる。一方 Ewing, Moolgavkar, Smith, Stong [6] の結果により、L^{15} : stably parallelizable とわかる。従って、$P_i(TL^{15}) = 0$ for $^\forall i \geq 1$ で Theorem 2 で $C=1$ ととれる。$N_4 = 14175$ であるから、$2CN_4\eta(L^{15}) \bmod \mathbb{Z} = 0.8759\cdots$

従って、L^{15} は codimension 7 で $\mathbb{R}^{22}$ に conformal に immerse できない。一方 L^{15} は stably parallelizable であるから、Hirsh-Smale theory により、$\mathbb{R}^{16}$ に smooth に immerse できる。

References

[1] M.F. Atiyah, V.K. Patodi and I.M. Singer,
Spectral asymmetry and Riemannian geometry I,
Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 77(1975), 43-69.

[2] M.F. Atiyah and I.M. Singer,
The index of elliptic operators III,
Ann. of Math. 87(1968), 546-604.

[3] S.S. Chern and J. Simons,
Characteristic forms and geometric invariants,
Ann. of Math. 99(1974), 48-69.

[4] H. Donnelly, Chern-Simons invariants of
reductive homogeneous spaces,
Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 227 (1977), 141-164.

[5] H. Donnelly, Eta invariants for G-spaces,
Indiana Univ. Math. J. 27(1978), 889-918.

[6] J. Ewing, S. Moolgavkar, L. Smith and R.E. Stong,
Stable parallelizability of Lens spaces,
J. Pure Appl. Algebra 10(1977), 177-191.

[7] J.J. Millson, Examples of nonvanishing Chern-Simons invariants, J. Differential Geometry
10(1974), 589-600.

[8] 中岡稔，不動点定理とその周辺，岩波書店 (1977)

[9] J. Simons, Characters associated to a connection, preprint

[10] K. Tsuboi, Eta invariants and conformal immersions, preprint